

Wozu braucht man Vektorrechnung bei der Datenübertragung?

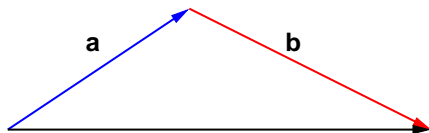
Henrik Schulze

Fachhochschule Südwestfalen Meschede

Nürnberg, 2011-06-07

- Eigenschaften von Vektoren \rightsquigarrow Signale als Vektoren
 - Projektion, Skalarprodukt und Orthogonalität
 - Detektoren und Matched Filter
 - Interferenzfreiheit und orthogonale Signale (\rightsquigarrow OFDM)
- Gaußsches Rauschen als Vektor
 - Physikalische Messung und mathematisches Modell
 - Optimale Empfänger und Projektionen
- Kanalcodierung und Vektoren im \mathbb{R}^N
- Zusammenfassung und Ausblick

Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} haben jeweils eine Richtung und einen Betrag (eine "Länge") $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{c}|$. Man kann sie



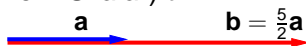
■ addieren

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

und

■ mit einer Zahl (einem *Skalar*) σ

multiplizieren



und erhält wieder Vektoren, wobei die üblichen Rechengesetze gelten (Distributiv-, Assoziativ-, Kommutativgesetz).

↪ **Vektorraum**-Struktur

Diskrete Signale sind Vektoren

Nicht nur die vertrauten 2D- oder 3D- Vektoren haben diese Struktur, sondern auch N -dimensionale **diskrete** Signale $s[n] \triangleq \mathbf{s}$ (Audiosamples o.ä.):

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix} \text{ mit } s_1 = s[1], s_2 = s[2], \dots$$

Unendliche Dimension ($N \rightarrow \infty$) ist möglich: Diskrete Signale endlicher Energie

$$E_s = \sum_{n=1}^{\infty} |s_n|^2 < \infty$$

bilden einen Vektorraum, weil

$$E_s, E_r < \infty \Rightarrow E_{s+r} < \infty \text{ und } E_{\sigma s} < \infty$$

Zeitsignale als Vektoren

Nicht nur diskrete Signale haben diese Struktur, sondern auch (diverse Klassen von) von Signalen (z.B. die stetigen Funktionen). Man kann sie genauso addieren und mit Skalaren multiplizieren.

Funktionen mit gewissen Eigenschaften sind Vektoren!

Die *quadratintegrablen* Funktionen sind Vektoren \rightsquigarrow Das sind gerade die Signale $s(t)$ mit *endlicher Energie*

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < \infty$$

Denn: Bei Addition und Multiplikation mit einem Skalar bleibt die Energie endlich:

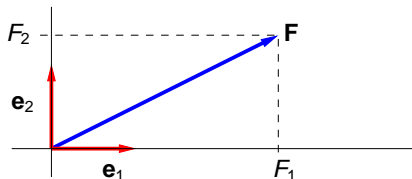
$$E_s, E_r < \infty \Rightarrow E_{s+r} < \infty \text{ und } E_{\sigma s} < \infty$$

Beispiel: Kraftvektor im 3D

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3$$

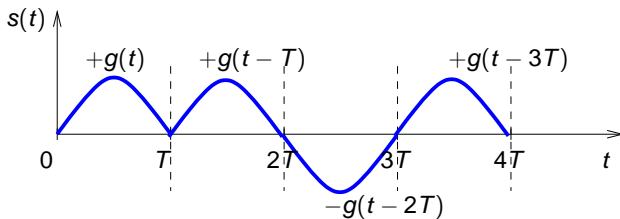
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$: **Basis** eines kartesischen Koordinaten-Systems

F_1, F_2, F_3 : **Koordinaten** in dieser Basis (= *Projektionen*)



Koordinatensysteme: Signalvektor

Beispiel: Übertrage Vorzeichen-Symbole s_i mit dem **Puls** $g(t)$ im Symboltakt T :



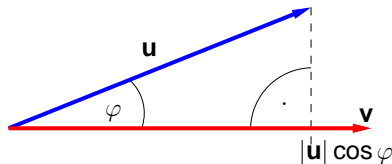
$$s(t) = s_0 g(t) + s_1 g(t - T) + s_2 g(t - 2T) + \dots + s_L g(t - LT)$$

Die verzögerten Pulse $g_i(t) = g(t - iT)$ sind die **Basis** und die Symbole s_i sind die **Koordinaten** in dieser Basis.

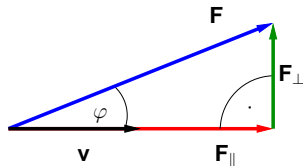
$$s(t) = s_0 g_0(t) + s_1 g_1(t) + \dots + s_L g_L(t)$$

Skalarprodukt – geometrisch

Im euklidischen Raum (z.B. 3D): $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cos \varphi$



Mit Skalarprodukten beschreibt man **Projektionen**:



$$\mathbf{F}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \mathbf{v}$$

ist die Komponente der Kraft \mathbf{F} parallel zum *Einheitsvektor* \mathbf{v}

Das Skalarprodukt in Dirac- Schreibweise

Die Bra-Ket-Notation der Quantenmechanik

Schreibweise:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \rightsquigarrow \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle$$

Bracket: $\langle \mathbf{u} |$ nennt man **Bra**-Vektor, $|\mathbf{v}\rangle$ nennt man **Ket**-Vektor.

Projektion der Kraft auf den Einheitsvektor \mathbf{v} :

$$\mathbf{F}_{\parallel} = \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}) \rightsquigarrow |\mathbf{F}_{\parallel}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v} | \mathbf{F} \rangle$$

ist die Komponente der Kraft \mathbf{F} parallel zum Einheitsvektor \mathbf{v}
und

$$|\mathbf{P}_{\mathbf{v}}\rangle = |\mathbf{v}\rangle \langle \mathbf{v}|$$

ist der **Projektor** auf den (Einheits-) Vektor \mathbf{v} .

Projektion = Multiplikation mit einem Bra-Vektor $\langle \mathbf{v}|$

Für (*komplexe*) Vektoren \mathbf{u} , \mathbf{v} mit Koordinaten u_i und v_i :

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle = \sum_i u_i^{(*)} v_i$$

Für (*komplexe*) Signale $u \triangleq u(t)$ und $v \triangleq v(t)$ endlicher Energie:

$$\langle u | v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u^{(*)}(t) v(t) dt$$

Definition: $|u\rangle$ und $|v\rangle$ nennt man **orthogonal**, falls

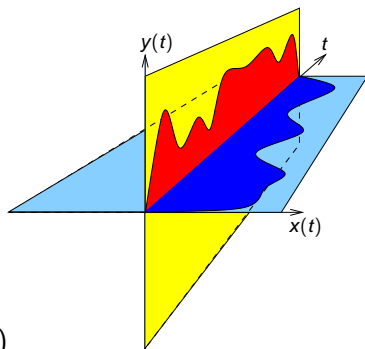
$$\langle u | v \rangle = 0$$

Schreibweise: $|u\rangle \perp |v\rangle$

Orthogonalität der Quadraturkomponenten

Quadraturmodulation der Tiefpass-Signale $x(t)$ und $y(t)$:

$$s(t) = \sqrt{2} x(t) \cos(2\pi f_0 t) - \sqrt{2} y(t) \sin(2\pi f_0 t)$$



$$x(t) \cos(2\pi f_0 t) \perp y(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$z(t) = x(t) + jy(t) \quad \simeq \quad \mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Orthonormale Basis und Koordinaten als Projektionen

Orthonormale¹ Basisvektoren $|e_i\rangle$:

$$\langle e_i | e_k \rangle = \delta_{ik}$$

Entwicklung nach einer orthonormalen Basis:

$$|u\rangle = \sum_k u_k |e_k\rangle \rightsquigarrow (\text{Projektion auf } |e_i\rangle)$$

$$\langle e_i | u \rangle = \sum_k u_k \langle e_i | e_k \rangle \rightsquigarrow (\text{wegen } \langle e_i | e_k \rangle = \delta_{ik})$$

$$u_i = \langle e_i | u \rangle$$

Die u_i sind die **Projektionen** auf die **Basisvektoren** $|e_i\rangle$.

¹ *Orthonormal* steht für *orthogonal* und *normiert*

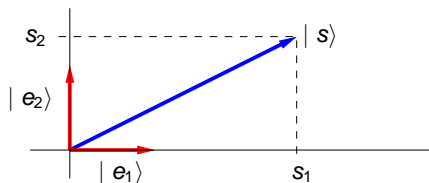
Signale als diskrete, endlich-dimensionale Vektoren

Die Signale

$$s(t) = \sum_{i=1}^L s_i e_i(t) \text{ bzw.}$$

$$|s\rangle = \sum_{i=1}^L s_i |e_i\rangle$$

kann man sich als Vektoren im L - dimensionalen Raum vorstellen:

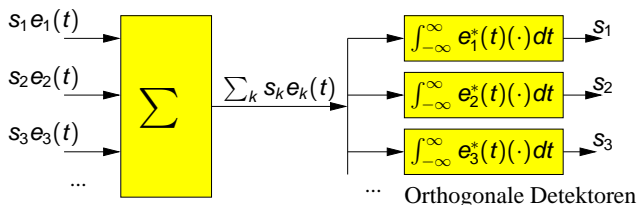


Wegen $s_i = \langle e_i | s \rangle$ ist $\langle e_i |$ der **Detektor** für das Symbol s_i .
In der Nachrichtentechnik nennt man ihn **Matched Filter**

Trennbarkeit: Freiheit von Intersymbolinterferenz (ISI)

Trennbarkeit = Orthogonalität.

Grundprinzip:



Der Detektor

$$\langle e_i | \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} e_i^*(t)(\cdot) dt$$

filtert die Information s_i zu Puls Nr. i heraus und blendet alle anderen aus, – wie ein **Polarisationsfilter**

Stichworte: **Matched-Filter (MF)** - Empfänger, Korrelationsempfänger, OFDM-Filterbank

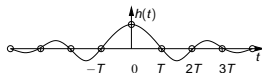
Beispiele für orthonormale Basis (-Signale)

Basis-Signale $e_i(t)$, die die **Orthonormalitätsbedingung**

$$\langle e_i | e_k \rangle = \int e_i^{(*)}(t) e_k(t) dt = \delta_{ik}$$

erfüllen:

- 1 Pulse $g(t)$ im Symboltakt T :



$$e_i(t) = g(t - iT)$$

Orthogonalitätsbedingung $\Leftrightarrow h(t) = g^{(*)}(-t) * g(t)$ erfüllt die **Nyquistbedingung** $h(iT) = \delta_{i0}$

- 2 Die Fourier-Basissignale

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \exp\left(j2\pi k \frac{t}{T}\right)$$

für das Intervall $[0, T]$ sind orthonormal \rightsquigarrow **OFDM** = **Orthogonal** Frequency Division Multiplexing

OFDM= Orthogonal Frequency Division Multiplexing

Fourier-Basisseignale auf $[0, T]$:

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi f_k t} \quad \text{mit} \quad f_k = \frac{k}{T}$$

Sendesignal mit Daten in $\{s_k\}_{k=-K/2}^{K/2}$:

$$|s\rangle = \sum_{k=-K/2}^{K/2} s_k |e_k\rangle$$

Fourieranalyse (=Projektion) liefert die Koordinaten zurück:

$$s_k = \langle e_k | s \rangle = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-j2\pi f_k t} s(t) dt$$

Übertragung mit Rauschen

“Without noise, communication is no fun!” (James Massey)

Betrachte *reellen* AWGN (additive white Gaussian noise)-Kanal:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Das Sendesignal $s(t)$ ist endlich-dimensional, aber das weiße Rauschen $n(t)$ ist *kein anständiges Signal*:

- Weißes Rauschen gibt es physikalisch nicht ($P = \infty$)
- AWGN ist eine mathematische Fiktion², ähnlich dem δ -Puls
- es ist als Grenzwert anständiger Signale zu erklären oder
- man muss mit anständigen Signalen multiplizieren und überintegrieren \rightsquigarrow Filtern

Außerdem ist das weiße Rauschen ein *stochastischer Prozess*.

²eine verallgemeinerte Funktion oder *Distribution*

Wie definiert man (reelles) AWGN?

Skizze einer mathematischen Formulierung durch eine physikalische **Messvorschrift**

Definition

AWGN der Dichte N_0 ist ein (distributiver) stochastischer Prozess $n(t)$ mit folgender Eigenschaft: Für ein beliebiges reelles Signal $g(t)$ mit endlicher Energie ist

$$n_g \triangleq \langle g | n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) n(t) dt$$

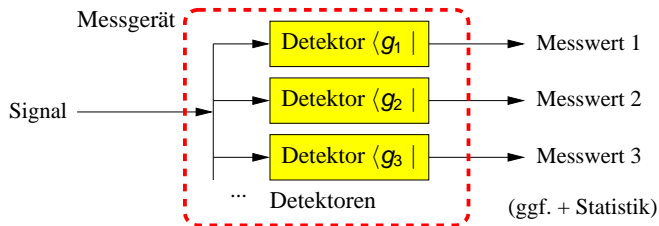
eine mittelwertfreie Gaußsche Zufallsvariable (GZV) der Varianz

$$E \{ n_g^2 \} = \frac{N_0}{2} \langle g | g \rangle .$$

Das Rauschen ist also durch seine *Detektor-Outputs* definiert!
Diese liefert z.B. ein *Spectrum Analyser* \rightsquigarrow

Exkurs: Prinzip eines (linearen) Messgerätes

Ein Messgerät liefert aus viele (lineare) Messungen \rightsquigarrow
zu jeder Messung gehört ein Detektor



- Die Menge aller *theoretisch möglichen* Messwerte³ legt das Signal fest, – aber kein Gerät kann diese alle messen!
- Manche Signale sind nicht unterscheidbar – man nennt das *begrenzte Auflösungsvermögen*
- Deshalb darf man auch mit *fiktiven* Signalen wie $\delta(t)$ oder $n(t)$ rechnen: Der Fehler ist nicht messbar!

³ggf. + deren Statistik

Detektion des Rauschen mit orthonormalen Basis

Betrachte orthonormale Basis von Pulsen $e_i(t) \triangleq |e_i\rangle$ und die zugehörigen Detektoren $\langle e_i|$. Detektor-Outputs sind die GZV

$$n_i = \langle e_i | n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e_i(t) n(t) dt$$

mit der Varianz

$$E \{ n_i^2 \} = \frac{N_0}{2}.$$

Satz

Die GZV n_i sind unkorreliert (und damit statistisch unabhängig):

$$E \{ n_i n_k \} = \frac{N_0}{2} \delta_{ik}$$

Beweis.

Für AWGN gilt nach Definition

$$C[g] = E \left\{ e^{j\langle g|n \rangle} \right\} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 \langle g|g \rangle}, \quad \sigma^2 = N_0/2.$$

Berechne $C[\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2] |_{\lambda_1, \lambda_2=0}$ und erhalte

$$E \{ \langle g_1 | n \rangle \langle n | g_2 \rangle \} = \sigma^2 \langle g_1 | g_2 \rangle$$

Mit $g_1 = e_1$ und $g_2 = e_2$ folgt die Behauptung. □

Was braucht der Empfänger?

Sendesignal:

$$s(t) = \sum_{k=1}^L s_k e_k(t) \quad \text{mit} \quad \langle e_i | e_k \rangle = \delta_{ik}$$

Empfangssignal:

$$r(t) = s(t) + n(t)$$

Detektor-Outputs $r_i = \langle e_i | r \rangle \rightsquigarrow$ diskreter Kanal:

$$r_i = s_i + n_i \quad \text{bzw. als Vektoren geschrieben:}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

Problemstellung:

- Welche Folge $\{s_k\}_{k=1}^L$ wurde am wahrscheinlichsten gesendet?
- Enthalten die $\{r_k\}_{k=1}^L$ alle nötige Information, um diese zu ermitteln?

Die Antwort ist “Ja”!

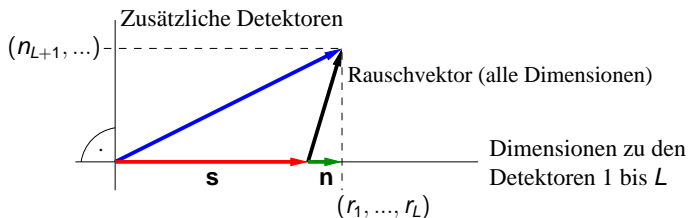
Satz

Die Folge $\{r_k\}_{k=1}^L$ (bzw. der Vektor \mathbf{r}) enthält alle Information zur optimalen Schätzung der wahrscheinlichsten Sendefolge $\{s_k\}_{k=1}^L$ (des wahrscheinlichsten Sendevektors \mathbf{r}).

Sufficient Statistics der MF-Outputs

Beweisskizze

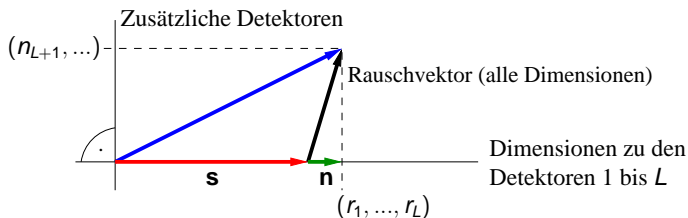
Gegeben: Die Detektor-Outputs r_i zu $e_i(t)$ ($i = 1, \dots, L$); *gedachte zusätzliche Detektoren* $e_{L+1}(t), \dots$ *orthogonal* zu $e_1(t), \dots, e_L(t)$ liefern Outputs n_{L+1}, \dots



Sufficient Statistics der MF-Outputs

Beweisskizze

Gegeben: Die Detektor-Outputs r_i zu $e_i(t)$ ($i = 1, \dots, L$); *gedachte zusätzliche Detektoren* $e_{L+1}(t), \dots$ *orthogonal zu* $e_1(t), \dots, e_L(t)$ liefern Outputs n_{L+1}, \dots

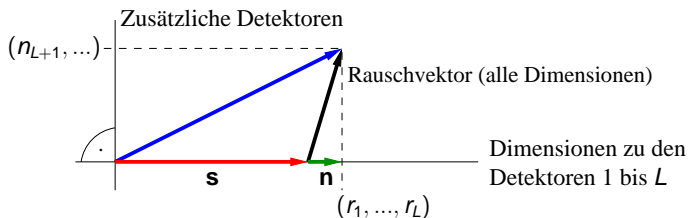


Damit erhält man aber nicht mehr brauchbare Information als durch den Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$

Sufficient Statistics der MF-Outputs

Beweisskizze

Gegeben: Die Detektor-Outputs r_i zu $e_i(t)$ ($i = 1, \dots, L$); *gedachte zusätzliche Detektoren* $e_{L+1}(t), \dots$ *orthogonal* zu $e_1(t), \dots, e_L(t)$ liefern Outputs n_{L+1}, \dots



Damit erhält man aber nicht mehr brauchbare Information als durch den Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$

Denn: Wegen der *Orthogonalität* sind die n_{L+1}, \dots *statistisch unabhängig* von \mathbf{s} und $\mathbf{r} \Rightarrow \Pr(\mathbf{s} \mid \mathbf{r}, n_{L+1}, \dots) = \Pr(\mathbf{s} \mid \mathbf{r})$

Maximum Likelihood Sequence Estimation (MLSE)

Diskreter, L -dimensionaler AWGN-Kanal:

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} + \mathbf{n}$$

Annahme: Alle Sendevektoren \mathbf{s} sind gleich wahrscheinlich.
Die bedingte Wahrscheinlichkeit für \mathbf{s} bei gegebenem
Detektor-Output \mathbf{r} lautet:

$$\Pr(\mathbf{s} | \mathbf{r}) \propto p(\mathbf{r} | \mathbf{s}) = (\pi N_0)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2}{N_0}\right)$$

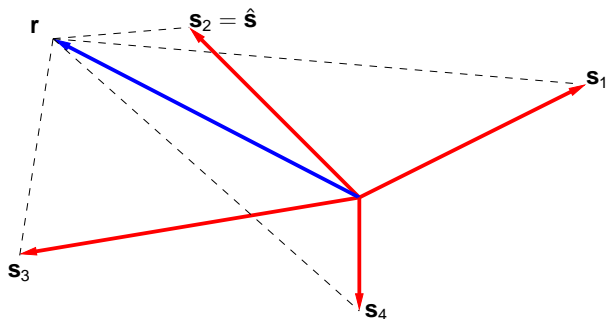
Maximal, wenn

$$|\mathbf{r} - \mathbf{s}| \stackrel{!}{=} \min$$

Man schreibt auch für den wahrscheinlichsten Sendevektor

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} (|\mathbf{r} - \mathbf{s}|)$$

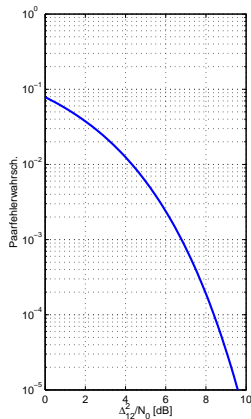
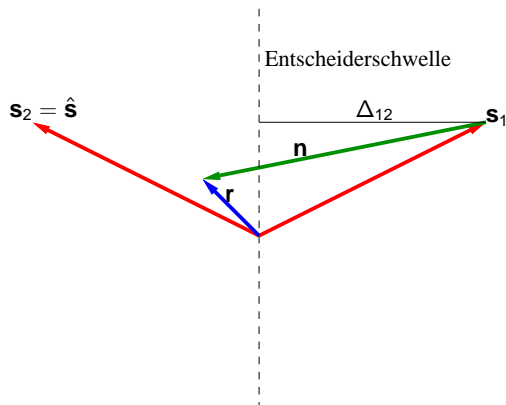
Minimiere die quadratische euklidische Distanz (QED):



$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} (|\mathbf{r} - \mathbf{s}|) = \mathbf{s}_2$ ist der ML-Vektor

Paarfehlerwahrscheinlichkeiten im AWGN-Kanal

Fehlerereignis: Sende \mathbf{s}_1 , aber Empfänger entscheidet auf \mathbf{s}_2



Fehlerwahrscheinlichkeit:

$$\Pr(\mathbf{s}_1 \rightarrow \mathbf{s}_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\Delta_{12}}^{\infty} e^{-\frac{1}{N_0} x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{\Delta_{12}^2}{N_0}}$$

MLSE – geometrisch \Rightarrow Korrelationsempfänger

bei Signalen gleicher Energie

Es gibt M mögliche Sendesignale. Wichtiger Spezialfall:

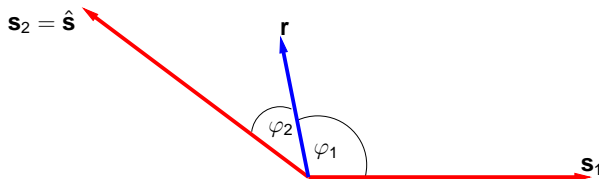
$$|\mathbf{s}_1|^2 = |\mathbf{s}_2|^2 = \dots = |\mathbf{s}_M|^2$$

\rightsquigarrow alle Signale haben die gleiche Energie. Dann gilt⁴:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} (|\mathbf{r} - \mathbf{s}|) \Leftrightarrow$$

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{r})$$

Maximiere die Korrelation \Leftrightarrow minimiere den Winkel:



⁴Binomische Formel: $|\mathbf{r} - \mathbf{s}|^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - 2\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$

Das Prinzip der Kanalcodierung

geometrisch interpretiert (Informationstheorie; Shannon 1948)

In höher-dimensionalen Räumen ist viel Platz!

↪ **Kann große Distanzen zwischen Vektoren \mathbf{s}_k erzielen**

Betrachte z.B. 2^K Sendevektoren der Länge N

$$\mathbf{s}_k = \begin{pmatrix} s_{1k} \\ s_{2k} \\ \vdots \\ s_{Nk} \end{pmatrix}, \quad s_{ik} \in \{\pm 1\} \text{ (BPSK)}$$

und übertrage damit **nur** K statt N Bits ($K < N$).

↪ 2^K statt 2^N Vektoren; Codematrix $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N]$

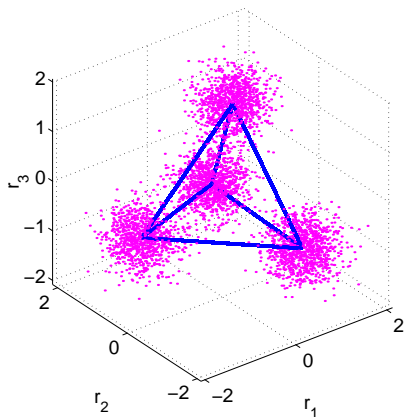
↪ (N, K) -**Blockcode** mit $N - K$ Bits **Redundanz**

Redundanz vergrößert Distanzen, verringert aber die Bitrate.

Beispiel: Tetraeder-Code = (3,2)-SPC-Code

SPC=Single Parity Check

3D-Konstellation bei $\text{SNR}_i=10$ dB



$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Decodierbeispiel für den Tetraeder-Code

Empfangsvektor: $\mathbf{r} = (0.1 \quad 0.7 \quad -0.5)^T$

MLSE-Skalarprodukte stehen in der Zeile

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^T \mathbf{S} &= (0.1 \quad 0.7 \quad -0.5) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (0.3 \quad -0.1 \quad 1.1 \quad -1.3)\end{aligned}$$

↪

$$\mathbf{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist der ML-Vektor.

Der SPC-Code kann Fehler korrigieren, wenn man den richtigen Decoder verwendet!

- Vektoren in der Signaltheorie: Die Anschauung erleichtert den Formalismus
- Oft reichen Bilder in zwei Dimensionen
- Viele moderne Übertragungsverfahren lassen sich geometrisch veranschaulichen.
Beispiel: Mehrfach-Antennensysteme (MIMO)
- Übrigens: Schon Shannon hat seine berühmte Formel zur Kanalkapazität geometrisch erklärt